ENSA-ALHOCEIMA	ANALYSE 4
CP II.	SEMESTRE 2
	F.MORADI

Exercice 1 :

a. *Calculons la limite de la suite :* $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n x dx$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ *:* $f_n(x) = tan^n x.$

Il est clair que:

i. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Et comme : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[: |tanx| < 1$ *et* $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$*, alors:*

ii. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\\ \quad 1 \quad si \quad x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$ *qui est une fonction continue par morceaux.*

iii. *De plus,* $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) (\forall n \in \mathbb{N}) : |f_n(x)| \leq 1 = g(x)$ *avec g est continue et intégrable sur* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0dx = 0$$

b. *Calculons la limite de la suite :* $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$

Posons $(\forall x \in [0, +\infty[) \ (\forall n \in \mathbb{N}) : \ f_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}$.

On a:

i. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0, +\infty[$.

ii. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \quad si \quad x \in [0,1[\\ \frac{1}{1+e} \quad si \quad x = 1 \\ 0 \quad si \quad x > 1 \end{cases}$$ *qui est une fonction continue par morceaux sur* $[0, +\infty[$.

iii. *De plus,* $(\forall x \in [0,+\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N}):\ |f_n(x)| \leq e^{-x} = g(x)$ *avec* g *est continue et intégrable sur* $[0,+\infty[$.

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} 0dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

c. *Calculons la limite de la suite:* $w_n = \int_0^{+\infty} \frac{sin^n x}{x^2} dx$

Posons $g_n(x) = \frac{sin^n x}{x^2}, \quad pour\ x \in]0,+\infty[\ \ et\ \ n \in \mathbb{N}.$

On a:

i. *la suite* $\left(g_n(x)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $]0,+\infty[$.

ii. *la suite* $\left(g_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, tel\ que \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^2} & si \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ tel\ que \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

qui est une fonction continue par morceaux sur $]0,+\infty[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}\right\}$.

iii. *Pour la condition de domination, on écrit* $w_n = a_n + b_n$ *telles que:* $a_n = \int_0^{\delta} \frac{sin^n x}{x^2} dx$ *et* $b_n = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{sin^n x}{x^2} dx$ *avec* δ *est une constante à déterminer.*

On sait que $lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x}{x^2} = 1$, *donc pour* $\varepsilon > 0$,

$$\exists 0 < \delta < \frac{\pi}{2}\ \ tel\ que: |x| \leq \delta \Longrightarrow \left|\frac{sin^2 x}{x^2} - 1\right| \leq \varepsilon \Longrightarrow \frac{sin^2 x}{x^2} \leq 1 + \varepsilon$$

Par suite,

$(\forall n \geq 2)(\forall x \in]0,\delta]): |g_n(x)| \leq (1 + \varepsilon)|sin^{n-2}x| \leq 1 + \varepsilon = h_1(x)$ *avec* h_1 *est continue et intégrable sur* $]0,\delta]$.

De plus, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [\delta,+\infty[): |g_n(x)| \leq \frac{1}{x^2} = h_2(x)$ *avec* h_2 *est continue et intégrable sur* $[\delta,+\infty[$ *(puisque* $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\delta}^{+\infty} = \frac{1}{\delta}$*)*

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$lim_{n\to+\infty}a_n = \int_0^{\delta} g(x)\,dx = 0$ et $lim_{n\to+\infty}b_n = \int_{\delta}^{+\infty} g(x)\,dx = 0$

Finalement, $lim_{n\to+\infty}w_n = 0$.

d. *Calculons la limite de* $z_n = \int_0^{+\infty}\frac{n\cos x}{1+n^2x^2}dx$

En utilisant le changement de variables $t = nx$*, on obtient:*

$dt = ndx$ et $\begin{cases} x = 0 \\ x \to +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t \to +\infty \end{cases}$

Par suite, $z_n = \int_0^{+\infty}\frac{cos\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}dt$

Posons $(\forall t \in [0,+\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*):\ f_n(t) = \frac{cos\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}$.

On a:

i. *la suite* $\left(f_n(t)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0,+\infty[$.

ii. *la suite* $\left(f_n(t)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ *qui est une fonction continue sur* $[0,+\infty[$.

iii. *De plus,* $(\forall t \in [0,+\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*):\ |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t)$ *avec g est continue et intégrable sur* $[0,+\infty[$.

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}z_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = [Arctant]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

e. *Calculons la limite de* $t_n = n\int_0^1\frac{e^{-nx}}{1+x}dx$

Comme précédemment, en utilisant le changement de variables $t = nx$*, on obtient:*

$$t_n = \int_0^n \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{n}}dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{n}}.\mathcal{X}_{[0,n]}(t)\,dt$$

Avec $\mathcal{X}_{[0,n]}$ *est la fonction indicatrice de* $[0,n]$ *définie par:*

$$\mathcal{X}_{[0,n]}(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ t \in [0,n] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Posons $(\forall t \in [0,+\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*):\ g_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{n}}.\mathcal{X}_{[0,n]}(t)$.

On a:

i. *la suite* $\left(g_n(t)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0,+\infty[$.

ii. la suite $\left(g_n(t)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$g(t) = e^{-t}$ *qui est une fonction continue sur* $[0,+\infty[$ *(car* $lim_{n\to+\infty}\mathcal{X}_{[0,n]}(t) = 1$ *.*

iii. De plus, $(\forall t \in [0,+\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $|g_n(t)| \leq e^{-t} = h(t)$ *avec h est continue et intégrable sur* $[0,+\infty[$ *.*

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}t_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

f. *Pour* $x_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}sin^n x dx$ *,*

la suite de fonctions $f_n(x) = e^{-x}sin^n x$ *est majorée par* $g(x) = e^{-x}$ *qui est continue et intégrable sur* $[0,+\infty[$.

De plus, la suite $\left(f_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[, tel\ que \quad k \in \mathbb{N} \\ e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \quad si \quad x = \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ tel\ que \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

qui est une fonction continue par morceaux sur

$]0,+\infty[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}\right\}$.

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}x_n = 0$$

Exercice 2 :

a. *Etudions la limite de l'intégrale:* $I_n = \int_0^1 f(x^n)dx$

Posons $g_n(x) = f(x^n)$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [0,1]$.

i. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ *et* $lim_{n\to+\infty}x^n = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0,1[\\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$

alors, $lim_{n\to+\infty}g_n(x) = \begin{cases} f(0) & si \quad x \in [0,1[\\ f(1) & si \quad x = 1 \end{cases}$

ii. De plus, comme f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ *alors*

$$\exists M > 0\ tel\ que\ \forall n \in \mathbb{N}\ et\ \forall x \in [0,1]: |f(x^n)| \leq M = h(x)$$

avec h est une fonction continue et intégrable sur $[0,1]$.

D'où, grâce au théorème de convergence dominée, on aboutit à:

$$lim_{n\to+\infty}I_n = \int_0^1 f(0)dx = f(0)$$

b. *Etudions la limite de l'intégrale:* $J_n = \int_0^{+\infty} nf(x)e^{-nx}dx$

Comme pour les suites z_n *et* t_n *de l'exercice précédent, on effectue le changement de variables* $t = nx$ *et on obtient:*

$dt = ndx$ *et* $\begin{cases} x = 0 \\ x \to +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t \to +\infty \end{cases}$

Par suite, $J_n = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}dt.$

Posons $g_n(t) = f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}$ $pour$ $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $t \in [0,+\infty[$.

i. *La suite* $\left(g_n(t)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0,+\infty[$.

ii. *La suite* $\left(g_n(t)\right)_n$ *converge simplement vers* $g(t) = f(0)e^{-t}$*car f est continue sur* $[0,+\infty[$.

iii. *De plus,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\forall t \in [0,+\infty[: |g_n(t)| \leq Me^{-t} = h(t)$

avec h est une fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Finalement, d'après le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}J_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-t}dx = [-f(0)e^{-t}]_0^{+\infty} = f(0)$$

c. *Etudions la limite de* $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx.$

Par le même changement de variables, $t = nx$, K_n *devient:*

$$K_n = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt \quad avec:\ g_n(t) = \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}$$

i. *La suite* $\left(g_n(t)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[0,+\infty[$.

ii. *Comme f est continue sur* $[0,+\infty[$, *alors la suite* $\left(g_n(t)\right)_n$ *converge simplement vers* $g(t) = \frac{f(0)}{1+t^2}$.

iii. *De plus,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\forall t \in [0,+\infty[: |g_n(t)| \leq \frac{M}{1+t^2} = h(t)$

avec h est une fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'où, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty}K_n = \int_0^{+\infty} g(t)dt = f(0).[Arctant]_0^{+\infty} = f(0)\frac{\pi}{2}$$

Exercice 3 :

1) Posons $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x} x^{\frac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$.

Il est clair que:

iv. la suite $\left(f_n(x)\right)_n$ est une suite de fonctions continues sur $[1, +\infty[$.

v. la suite $\left(f_n(x)\right)_n$ converge simplement vers la fonction:
$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ qui est une fonction continue sur $[1, +\infty[$.

vi. De plus, $(\forall x \in [1, +\infty[)(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $|f_n(x)| \leq e^{-x} = g(x)$ avec g est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} x^{\frac{1}{n}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

2) Posons $I_n = n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$. Par le changement de variables $t = x^n$, on obtient : $x = t^{\frac{1}{n}}$ donc $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$ et $\begin{cases} x = 1 \\ x \to +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \to +\infty \end{cases}$.

Par suite:

$$I_n = n \int_1^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{\frac{1}{n}} dt$$

Donc d'après 1), on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

Exercice 4 :

1) Comme $lim_{x\to0^+} \varphi(x) = lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2-1} . xlnx = 0$

et $lim_{x\to1^-} \varphi(x) = lim_{x\to1^-} \frac{x}{x+1} . \frac{lnx}{x-1} = \frac{1}{2}$, alors φ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

Par suite, φ est intégrable sur $]0,1[$.

2) On a $f_n(x) = \frac{lnx}{x^2-1} x^{2n+1}$ et $\forall x \in]0,1[$: $\varphi(x) \geq 0$ donc

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in]0,1[): \ |f_n(x)| = |\varphi(x).x^{2n}| \leq |\varphi(x)| = \varphi(x)$$

Et puisque φ est intégrable sur $]0,1[$ alors pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1[$.

3) *La suite de fonctions* $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait les conditions du théorème de convergence dominée, donc*

$$lim_{n\to+\infty}I_n = \int_0^1 lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx = 0$$

Soit $k\epsilon\mathbb{N}^*$, *on a donc*

$$I_{k-1}-I_k = \int_0^1 \left(f_{k-1}(x)-f_k(x)\right)dx = \int_0^1 \frac{lnx}{x^2-1}\left(x^{2k-1}-x^{2k+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{lnx}{x^2-1}x^{2k-1}\left(1-x^2\right)dx = -\int_0^1 x^{2k-1}lnxdx$$

Par une intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = x^{2k-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{2k}x^{2k} \end{cases}$$

Et on trouve

$$\int_0^1 x^{2k-1}lnxdx = lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{1}{2k}x^{2k}.lnx\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k}\int_0^1 x^{2k-1}dx = -\frac{1}{(2k)^2}\left[x^{2k}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{(2k)^2}$$

Finalement, $I_{k-1}-I_k = \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4k^2}$.

En faisant la sommation de $k = n+1$ *jusqu'à N , on obtient*

$$\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{N}\left(I_{k-1}-I_k\right) = I_n - I_N$$

Et en tendant N vers $+\infty$, *on aboutit à*

$$\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = I_n - lim_{N\to+\infty}I_N = I_n$$

Exercice 5 :

On a $f(x,y) = \frac{ln(1+xy)}{1+x^2}$ $avec$ $(x,y)\in\left([0,+\infty[\right)^2$

1) *Soit* $(x,y)\in\left([0,+\infty[\right)^2$ *, posons* $g(y) = 1+xy$.

i. *g est une fonction affine dérivable sur* $[0,+\infty[$

ii. $g([0,+\infty[) \subset [1,+\infty[$

iii. *La fonction logarithme est dérivable sur* $[1,+\infty[$

Donc les fonctions $y \longmapsto ln(1 + xy)$ *et* $y \longmapsto \frac{ln(1+xy)}{1+x^2}$ *sont dérivables sur* $[0, +\infty[$.

Par suite, f est dérivable par rapport à y sur $[0, +\infty[$ *et*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(1 + x^2)(1 + xy)}$$

2) *Posons* $I(y) = \int_0^y f(x, y)\,dx$

1) *Comme les fonctions* $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ *et* $(x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *sont continues sur* $([0, +\infty[)^2$ *et la fonction* $y \longmapsto y$ *est de classe* C^1 *sur* $[0, +\infty[$ *alors, I est dérivable sur* $[0, +\infty[$ *et on a*

$$I'(y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx + f(y, y) * 1 - f(0, y) * 0$$

$$= \int_0^y \frac{x}{(1 + x^2)(1 + xy)}\,dx + \frac{ln(1 + y^2)}{1 + y^2}$$

2) *Montrons que :*

$$I'(y) = \frac{ln(1 + y^2)}{2(1 + y^2)} + \frac{yArctany}{(1 + y^2)}$$

Calculons $\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx$ *en décomposant la fonction en fractions rationnelles.*

Cherchons α, β *et* γ *tels que:*

$$\frac{x}{(1 + x^2)(1 + xy)} = \frac{\alpha x + \beta}{(1 + x^2)} + \frac{\gamma}{(1 + xy)}$$

On trouve le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta y = 1 \\ \alpha y + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + y\beta = 1 \\ y\alpha - \beta = 0 \\ \gamma = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + y\beta = 1 \\ \beta = y\alpha \\ \gamma = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1 + y^2) = 1 \\ \beta = y\alpha \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

On obtient donc:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{(1 + y^2)} \\ \beta = \dfrac{y}{(1 + y^2)} \\ \gamma = -\dfrac{y}{(1 + y^2)} \end{cases}$$

Et par suite,

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)}$$

Finalement,

$$\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx = \frac{1}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)}dx + \frac{y}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{1}{(1+x^2)}dx - \frac{y}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{1}{(1+xy)}dx$$

D'où,

$$\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx = \frac{1}{(1+y^2)}\left[\frac{1}{2}ln(1+x^2)\right]_0^y + \frac{y}{(1+y^2)}[Arctanx]_0^y - \frac{1}{(1+y^2)}[ln(1+xy)]_0^y$$
$$= \frac{ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{yArctany}{(1+y^2)} - \frac{ln(1+y^2)}{(1+y^2)}$$

Ceci est équivalent à:

$$\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx + \frac{ln(1+y^2)}{1+y^2} = \frac{ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{yArctany}{(1+y^2)}$$

On en déduit donc,

$$I'(y) = \frac{ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{yArctany}{(1+y^2)}$$

3) *Calculons* $\int_0^y \frac{tArctant}{1+t^2}dt$, *en utilisant une intégration par parties:*

Posons $\begin{cases} u(t) = Arctant \\ v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{(1+t^2)} \\ v(t) = \frac{1}{2}ln(1+t^2) \end{cases}$

Par suite,

$$\int_0^y \frac{tArctant}{1+t^2}dt = \left[\frac{1}{2}ln(1+t^2)Arctant\right]_0^y - \frac{1}{2}\int_0^y \frac{ln(1+t^2)}{(1+t^2)}dt$$

$$= \frac{1}{2}Arctany * ln(1+y^2) - \frac{1}{2}\int_0^y \frac{ln(1+t^2)}{(1+t^2)}dt$$

4) D'après la question précédente, on a:

$$\int_0^y \frac{tArctant}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{ln(1+t^2)}{(1+t^2)}dt = \frac{1}{2}Arctany * ln(1+y^2)$$

D'où,

$$I(y) = \int_0^y I'(t)dt = \frac{1}{2}Arctany * ln(1+y^2)$$

5) On en déduit donc que,

$$\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx = I(1) = \frac{1}{2}Arctan1 * ln(2) = \frac{\pi}{8}ln(2)$$

Exercice 6 :

Posons: $h(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ $\quad pour\ (x,t) \in \mathbb{R}^2$.

1) Comme h est le produit et le composé de fonctions usuelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors, h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Par suite, h est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}^2$ et on a:

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'où, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$.

2) On a $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [Arctant]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Déterminons $lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $lim_{x\to-\infty} f(x)$

Pour $x \geq 0$ on a:

$$\left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2} \quad \Longrightarrow |f(x)| \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}e^{-x}$$

Or, $lim_{x\to+\infty}e^{-x} = 0$, par suite, $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'une autre part, pour $x \leq 0$ on a:

$$\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \geq \frac{e^{-x}}{1+t^2} \quad \Longrightarrow f(x) \geq \frac{\pi}{4}e^{-x}$$

Or, $lim_{x\to-\infty}e^{-x} = +\infty$, par suite, $lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3) Posons $u(x) = x^2$, on a donc $g(x) = f\big(u(x)\big)$

a- La fonction u étant dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et sa dérivée est donnée par:

$$g'(x) = f'\big(u(x)\big).u'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt$$

En utilisant le changement de variables $u = xt$, *obtient*

$du = xdt$ *et* $\begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = x \end{cases}$

Par suite, $x\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt = \int_0^x e^{-u^2}du.$

Finalement,

$$g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

b- Posons $v(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ *et* $\alpha(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2.$

il est clair que v est dérivable sur $\mathbb{R}$ *puisque la fonction* $t \longmapsto e^{-t^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$. *De plus,* $v'(x) = e^{-x^2}$ *et*

$$\alpha'(x) = g'(x) + 2v(x)v'(x) = g'(x) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

D'après ce qui précède,

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \alpha'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}:\ \alpha(x) = constante$$

Or $\alpha(0) = g(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$, *d'où,*

$$\forall x \epsilon \mathbb{R}:\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

c- Par passage à la limite, on trouve:

$$lim_{x\to+\infty}\left(g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2\right) = \frac{\pi}{4}$$

Et comme $lim_{x\to+\infty}g(x) = lim_{x\to+\infty}f(x) = 0$, *alors*

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On sait que $\forall t \in \mathbb{R}:\ e^{-t^2} \geq 0$, *ce qui nous assure que* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \geq 0$ *et par suite*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Remarque:

Cet exercice nous propose une méthode pour montrer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$